d) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

2) a) $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{\left(1+e^{2t}\right)^2}$

On a :

$$f'(t) - \frac{1}{2} = \frac{2e^{2t}}{\left(1+e^{2t}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = \frac{4e^{2t} - \left(1+e^{2t}\right)^2}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{4e^{2t} - \left(1+2e^{2t}+e^{4t}\right)}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-1+2e^{2t}-e^{4t}}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-\left(e^{2t}-1\right)^2}{2\left(1+e^{2t}\right)} \le 0$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$: $f'(t) \le \dfrac{1}{2}$

b) f continue sur $[0, x]$ et dérivable

sur $]0, x[$ et $0 \le f'(t) \le \dfrac{1}{2}$

d'après Le théorème des inégalités des Accroissements finis on a :

$$0 \le f(x) - f(0) \le \frac{1}{2}(x-0)$$

D'où : $f(x) - \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2}x$

C'est-à-dire $f(x) \le \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Donc $\forall x \ge 0$: $f(x) \le \dfrac{1}{2}(x+1)$

c) */ pour $x \ge 0$

On a : $f(x) \le \dfrac{1}{2}(x+1)$

D'où (C) la courbe représentative

de f est au dessus de la tangente T.

*/ pour $x \le 0$:

f Continue sur $[x, 0]$ est dérivable

Sur $]x, 0[$ et $f'(t) \le \dfrac{1}{2} (\forall t \in \mathbb{R})$

Donc d'après le théorème des inégalités

des accroissements finies on a :

$$f(0) - f(x) \le \frac{1}{2}(0 - x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - f(x) \le -\frac{1}{2}x$$

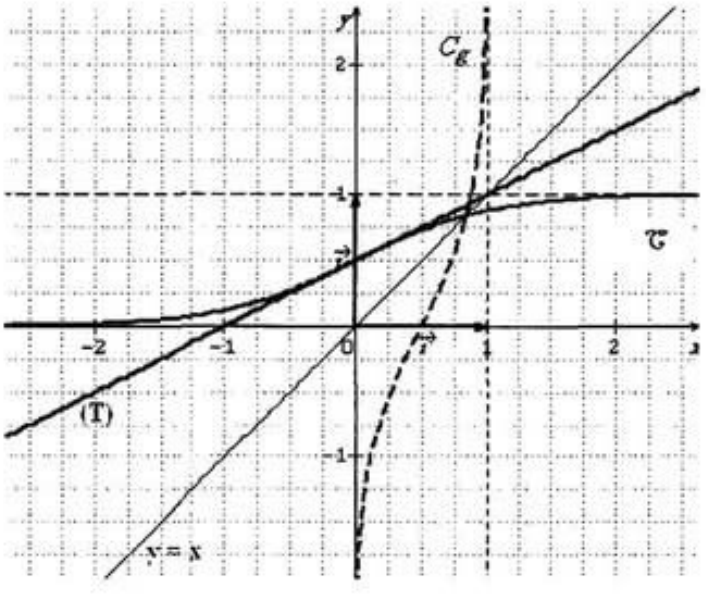
$$\Leftrightarrow f(x) \ge \frac{1}{2}(x+1)$$

D'où $\mathcal{C}$ la courbe représentative

de f est au dessus de la tangente T

.Conclusion :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Position de ζ et T	ζ / T	T / ζ	

$(0, 1/2)$

3)